EL CICLO DE CARNOT Y EL TEOREMA DE CLAUSIUS

El Segundo Principio de la Termodinámica nos dice que todos los procesos de la Naturaleza son irreversibles.

Si analizamos someramente los procesos naturales, todos presentan al menos una de estas dos características: a) No quedan en absoluto satisfechas las condiciones de equilibrio mecánico, químico o térmico, es decir, de equilibrio termodinámico, b) Se producen siempre efectos de disipación energética, viscosidad, resistencia eléctrica, etc.. Solamente si un proceso se realiza quasi-estáticamente pasaría por una serie de estados de equilibrio termodinámico de modo que el trabajo que realiza puede recibirlo en el proceso inverso. Para que un proceso pueda, pues, considerarse reversible ha de cumplir en definitiva: primero, que sea cuasi-estático, y, segundo, que no se desarrollan en el mismo efectos de disipación energética.

Cuando pretendemos crear un motor que funcione entre dos focos caloríficos, sabemos, por el Enunciado de Kelvin-Planck del Segundo Principio de la Termodinámica, que ha de tomar calor del foco caliente para realizar trabajo, pero, siempre, ha de ceder algo de calor al foco frío. Y el rendimiento del motor viene relacionado con la cantidad de calor que absorbe del foco caliente y la que cede al foco frío. Las preguntas que nos hacemos, y que también se hizo en su día el francés Nicolas Leonard Sadi Carnot (1796-1832), son ¿Cuál es el máximo rendimiento que puede obtenerse de un motor funcionando entre dos focos?, ¿Cuáles son las características?, ¿depende de la sustancia con la que el motor funciona?.

Carnot describió en 1824, en su artículo "Sur la puissance motrice du feu", cuando tenía 28 años, un motor ideal reversible que funcionaba con el rendimiento máximo en un ciclo muy sencillo, formado por dos tramos isotérmicos y dos adiabáticos, ciclo que hoy día se conoce como El Ciclo de Carnot.

Carnot

Clausius

Desde el concepto de Ciclo de Carnot el matemático y físico alemán Rudoff E. Clausius (1822-1888) pudo probar en 1850 un teorema fundamental para el desarrollo posterior de la Termodinámica, que permitió establecer matemáticamente el concepto de Entropia.

1. UN CICLO IDEAL. EL CICLO DE SADI CARNOT:

La definición del Ciclo:

El Ciclo llamado de Carnot es un ciclo reversible que consta de cuatro tramos: dos a temperatura constante (dos procesos isotérmicos), y otros dos sin absorción ni cesión de calor (dos procesos adiabáticos). Es decir, se trata de una transformación bitérmica (entre dos temperaturas).

El rendimiento teórico:

Como en todas las transformaciones bitérmicas, el rendimiento viene dado por

$$R_e = \frac{W}{Q_1}$$

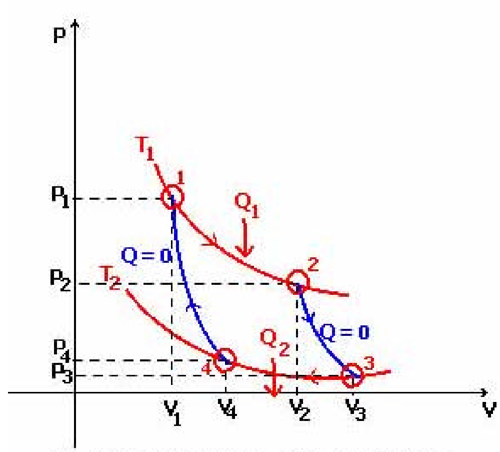
Donde W representa el trabajo producido durante la transformación y Q1 el calor que absorbe del foco caliente.

Puesto que no hay variación de energía interna, por tratarse de un proceso cíclico, se tiene que por el Primer Principio de la Termodinámica es $W = \Delta U + \Delta Q = 0 + \Delta Q$, es decir, se tiene que $W = Q_1 - Q_2$.

$$R_e = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad [1]$$

2. EL CICLO DE CARNOT DE UN GAS PERFECTO:

Cuando el sistema que evoluciona en un Ciclo de Carnot es un gas ideal, tanto el calor absorbido como el calor cedido se puede determinar muy fácilmente, puesto que sabemos que en las transformaciones isotermas se verifica que el trabajo necesario para una expansión viene dado por la relación $W = n.R.T.\ln\left(V/V_0 \right)$. y también sabemos que cuando no hay transvase de calor se verifica la relación temperatura-volumen dada por $T.V^{g-1} = const.$



EL CICLO IDEAL DE CARNOT

Esto quiere decir, analizando los cuatro tramos del Ciclo de Carnot para este tipo de sistema gaseoso:

Primer proceso: Expansión isotérmica a temperatura T_1 absorviendo calor Q_1, con paso del volumen V_1 al volumen V_2:

$$Q_1 = W_1 = n.R.T_1.\ln\left(V_2/V_1\right)$$

Segundo proceso: Expansión adiabática pasando de la temperatura T_1 a la temperatura T_2, pasando del volumen V2 al volumen V3:

$$T_1.V_2^{g-1} = T_2.V_3^{g-1} = const. \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{g-1}$$

Tercer proceso: Compresión isotérmica a temperatura T_2, cediendo calor Q_2, con paso del volumen T_1, pasando del volumen V_3 al volumen V_4:

$$-Q_2 = W_2 = n.R.T_2.\ln\left(V_4/V_3\right)$$

Cuarto proceso: Compresión adiabática pasando de la temperatura T_2 a la temperatura T_1, pasando del volumen V_4 al volumen V_1:

$$T_2.V_4^{g-1} = T_1.V_1^{g-1} = const. \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{g-1}$$

Esto nos permite deducir: $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$

También se deduce entonces que

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{nRT_2.\ln\left(V_3/V_4\right)}{nRT_1\ln\left(V_2/V_1\right)} = \frac{T_2}{T_1}$$

y el rendimiento:

$$R_e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad [2]$$

Este resultado es fundamental. Nos indica que el rendimiento de un Ciclo de Carnot depende exclusivamente de las temperaturas de los focos frío y caliente y no de las cantidades de calor transvasadas ni del tipo de sustancia con la que funciona el ciclo.

Todos los Ciclos de Carnot, operando entre dos temperaturas dadas, tienen el mismo rendimiento:

$$R_e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

3. EL TEOREMA DE CARNOT:

Teorema: El rendimiento de un ciclo cualquiera es inferior al Ciclo de Carnot.

En efecto:

Consideremos un motor de Carnot C y otro motor cualquiera M que trabajan entre los dos mismos focos caloríficos, ajustados de manera que produzcan la misma cantidad de trabajo W.

Entonces:

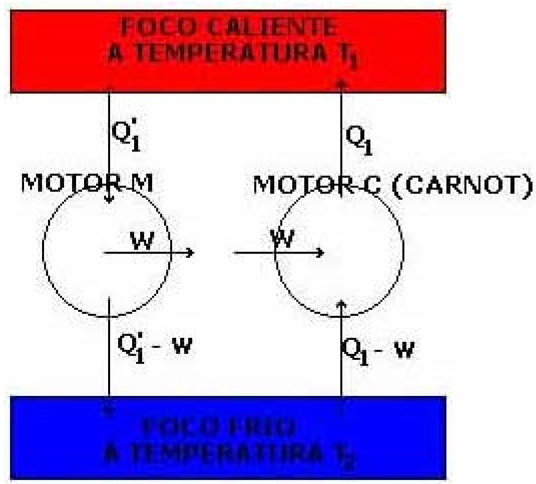
El motor C de Carnot produce el trabajo W y absorbe el calor Q_1 del foco caliente, cediendo al foco frío el la diferencia Q_1 - W.

El motor M realiza también el trabajo W y absorbe el calor Q'_1 del foco caliente, cediendo la diferencia Q'_1 - W al foco frío.

Supongamos que el rendimiento R'_e del motor M es superior al rendimiento Re del motor C de Carnot. Se tendrá:

$$R_e^{'} > R_e \Rightarrow \frac{W}{Q_1^{'}} > \frac{W}{Q_1} \Rightarrow Q_1 > Q_1^{'}$$

Hagamos ahora que el motor M accione al motor C de Carnot en sentido inverso para que funcione C como máquina frigorífica. Se tendría el siguiente diagrama:



Observamos que el balance de calor extraído y suministrado al foco caliente es:

Extraído: $Q_1^{'}$, suministrado: Q_1, y como $Q_1 > Q_1^{'}$ resulta que el balance es el de ceder al foco caliente la cantidad de calor dada por $Q_1 - Q_1^{'}$.

Por otra parte, se ha cedido al foco frío la cantidad de calor Q'_1 - W, mientras que se ha absorbido la cantidad de calor Q_1 - W, que es mayor, por lo cual el balance es el de absorber calor desde el foco frío.

En definitiva, con el dispositivo conjunto de la figura se obtiene como balance total el de pasar calor desde un foco frío a un foco caliente sin recibir trabajo del exterior, lo cual contradice al Enunciado de Clausius del Segundo Principio de la Termodinámica, luego deducimos que la situación descrita es imposible, o sea, que nunca el rendimiento de un motor dado M puede ser mayor que el rendimiento de un motor de Carnot C. Escribiremos que:

$$R_e^{'} \leq R_e$$

lo cual prueba el teorema.

Corolario: Todos los ciclos de Carnot tienen igual rendimiento.

En efecto:

Dados dos motores de Carnot, C1 y C2, si, como se ha hecho en el teorema, suponemos que C1 acciona a C2 para que éste funcione como máquina frigorífica, llegamos a la conclusión de que el rendimiento de C1 no puede ser mayor que el rendimiento de C2, es decir, $R_{e1} \le R_{e2}$. Análogamente, si es C2 el que acciona a C1 para hacerlo funcionar como máquina frigorífica, deducimos análogamente que $R_{e2} \le R_{e1}$. En definitiva, por tanto: $R_{e1} = R_{e2}$

Del Teorema de Carnot se tiene que para un motor cualquiera M su rendimiento R'_e es inferior al rendimiento de Carnot:

$$R'_e / R_e < 1$$

Este cociente, pues, es menor que la unidad y se denomina *factor de calidad* del motor M:

$$f_c = \frac{R'_e}{R_e}$$

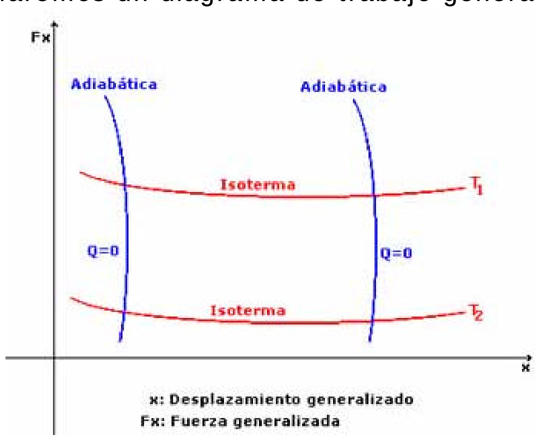
El trabajo desarrollado por un motor cualquiera M, de factor de calidad f_c, funcionando entre dos focos de temperatura T_1 y T_2 es, cuando absorbe una cantidad de calor Q_1:

$$W = Q_1 . R'_e = Q_1 . f_c . R_e = Q_1 . f_c . \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

4. ALGUNOS EJEMPLOS DE CICLOS DE CARNOT:

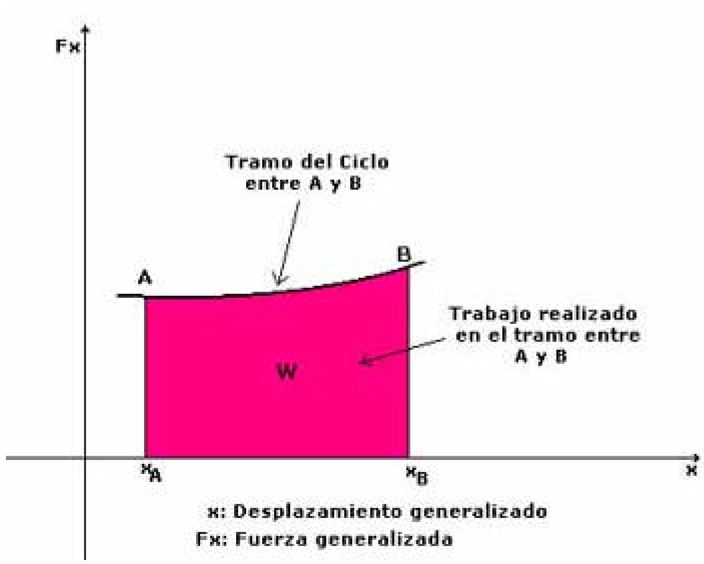
Si un motor reversible funciona entre dos únicos focos caloríficos ha de describir necesariamente un Ciclo de Carnot, pues si describiera otro ciclo diferente, el calor transferido al sistema supondría diferencias finitas de temperatura que harían que el motor no fuera reversible. Recíprocamente, si un motor fuera reversible, exigiría un número de focos caloríficos mayor que dos, por lo cual podemos afirmar la equivalencia entre las afirmaciones *Motor de Carnot* y *motor reversible funcionando entre dos focos caloríficos únicos.*

La representación esquemática de un Ciclo reversible funcionando entre dos focos, y, por consiguiente, mediante dos isotermas y dos adiabáticas puede hacerse en un diagrama bidimensional en donde aparezca en un eje la fuerza generalizada (presión, fuerza electromotriz, campo electrico, campo magnetico, etc., y en el otro eje aparezca el desplazamiento generalizado x, volumen, carga, imanación, etc. Esto es lo que llamaremos un diagrama de trabajo generalizado:



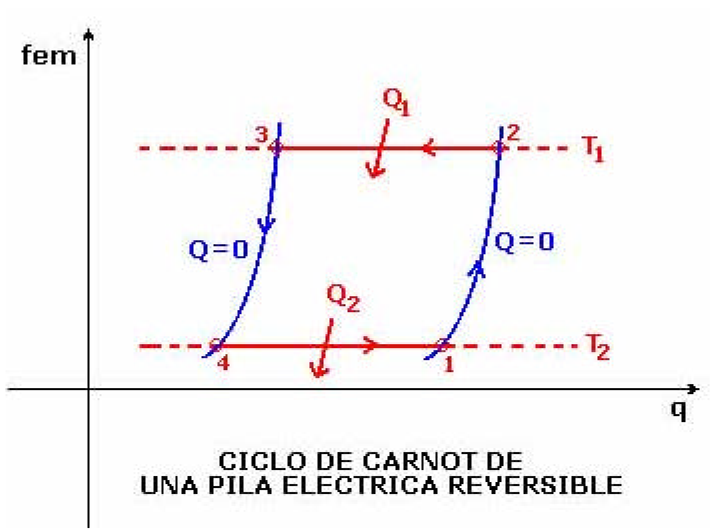
El trabajo realizado a lo largo de un tramo cualquiera comprendido entre dos puntos A y B del mismo es el área comprendida bajo la gráfica correspondiente del tramo y que lo da la integral correspondiente de la fuerza generalizada por la diferencial del desplazamiento generalizado

$$W = \int_A^B Fx.dx$$

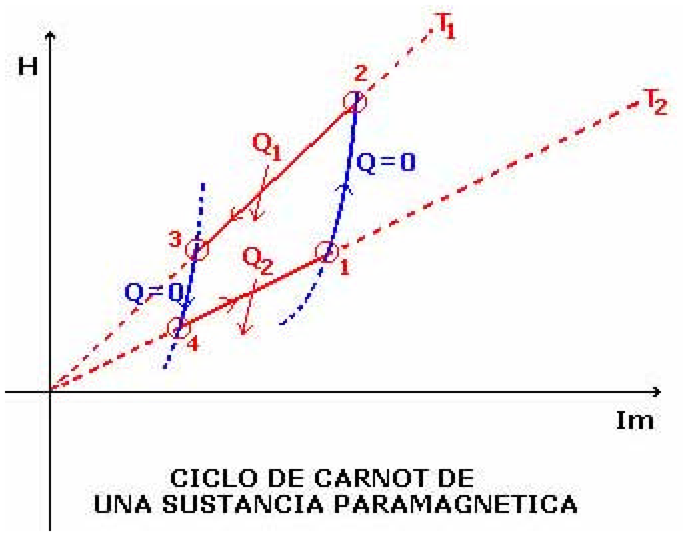


Veamos un par de ejemplos de Ciclos de Carnot:

Ciclo de Carnot de una pila eléctrica reversible, en diagrama carga-fuerza electromotriz:



Ciclo de Carnot de una sustancia paramagnética, en un diagrama imanación-campo magnetico:



CICLO DE CARNOT DE
UNA SUSTANCIA PARAMAGNETICA

5. EL TEOREMA DE CLAUSIUS:

Si igualamos las expresiones [1] y [2] del rendimiento de un motor de Carnot:

$$1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}\Rightarrow\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}$$

que podemos escribir, teniendo en cuenta que al calor cedido Q_2 le asignamos signo negativo:

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0$$

O bien, escribimos

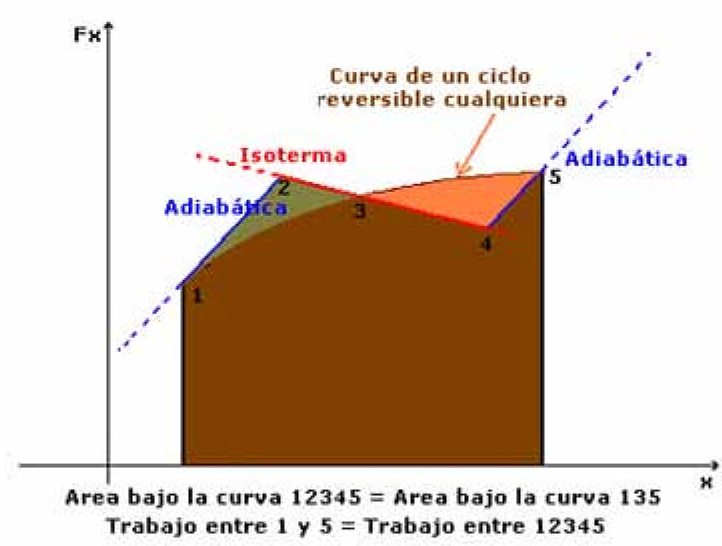
$$\sum_{j=1}^{2}\frac{Q_j}{T_j}=0 \qquad [3]$$

Es decir, la suma algebraica de los cocientes que resultan de dividir la cantidad de calor entre la temperatura absoluta a la que ese calor se absorbe o se cede, es igual a cero.

Este resultado puede generalizarse a cualquier ciclo reversible. La idea básica, en efecto, es que cualquier ciclo reversible puede descomponerse en un número suficientemente elevado de Ciclos de Carnot.

Esto querría decir que cada tramo de un ciclo reversible cualquiera puede sustituirse por un ciclo de Carnot que tiene el mismo rendimiento que el tramo sustituido, esto es, realiza la misma cantidad de trabajo para la misma cantidad de calor recibido.

Podemos sustituir cada tramo de un ciclo reversible cualquiera por una adiabática seguida de una isoterma y de otra adiabática, de modo que el trabajo que se realice en el tramo sustituido es el mismo que el que se realiza a lo largo del tramo reversible, esto es, el área barrida por las curvas correspondientes al ciclo reversible cualquiera y el área barrida por la adiabática-isoterma-adiabática coincidan. Lo podemos visualizar en la siguiente figura.



Se tiene, entonces, que $\Delta W_{12345} = \Delta W_{15}$, y, de acuerdo con el Primer Principio de la Termodinámica, es $\Delta Q_{12345} - \Delta W_{12345} = \Delta Q_{15} - \Delta W_{15} \Rightarrow \Delta Q_{12345} = \Delta Q_{15}$.

Por tanto, el balance de calor y de trabajo es el mismo en ambas trayectorias, coincidiendo, en definitiva, el rendimiento.

Si sustituimos todo el ciclo reversible por n tramos de Carnot a lo largo de toda la gráfica, se puede generalizar la ecuación [3]:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta Q_j}{T_j} = 0$$

O en el límite, si consideramos las adiabáticas infinitamente próximas:

$$\oint_{ciclo} \frac{dQ}{T} = 0$$

Este es le Teorema de Clausius:

En todo ciclo reversible, la suma algebráica de dividir las cantidades elementales de calor absorbido (+) o cedido (-) por las respectivas temperaturas absolutas a las cuales tienen lugar los procesos de absorción o cesión, es cero.

6. REFERENCIAS:

ADKINS, C.J., Thermal Physics. Cambridge University Press, 1987

ENCICLOPEDIA ENCARTA

WEBER, ROBERT, Física para matemáticas e ingeniería, Mc Graw Hill, 1987

ZEMANSKY, MARK W., Heat and Thermodynamics, Mc Graw Hill, 1968

ZEMANSKY, M. W.-VAN NESS, H.C. Termodinámica Técnica Fundamental, Aguilar, S.A. de Ediciones, 1972